LAS MATEMATICAS Y SU ENSEÑANZA*

ANDRE LICHNEROWICZ**

Se me ha pedido que aborde aquí el problema de las matemáticas y su enseñanza en nuestra sociedad contemporánea.

En el mundo en que vivimos, la mejor manera de medir el desarrollo de una sociedad nos es suministrada, sin duda, por la educación promedio de sus miembros y la distribución armoniosa de esta educación en cuanto a las disciplinas, métodos y técnicas empleadas.

No hace mucho, bastaba con que un hombre se pudiera expresar correctamente en su lengua nativa, supiera leer y escribir, y pudiera realizar algunos cálculos elementales con números decimales, para sentirse plenamente integrado a la sociedad en la que vivía.

Hoy, sin embargo, el panorama ha cambiado, y para sentirse un ciudadano con plenos derechos en la sociedad humana, un hombre de la segunda mitad del siglo xx debe saber situarse en el tiempo y en el espacio, y poder ubicarse en su civilización en el lugar que le corresponde entre los otros; debe saber comunicarse con otras comunidades que no sean la suya y en el lenguaje propio de éstas, y debe, sobre todo, conocer y dominar algunos de los métodos de pensamiento y de acción que constituyen el saber hacer de nuestra ciencia y nuestra técnica.

En este proceso, las matemáticas juegan un papel privilegiado: nos ayudan en la comprensión de aquello que llamamos lo real, tanto lo real físico como lo real social. Nuestras matemáticas secretan, por naturaleza, la economía de pensamiento, y por ello nos permiten clasificar, dominar y sintetizar, a veces en fórmulas muy breves, un saber que de otra manera terminaría por parecerse a un enfadoso diccionario enciclopédico terriblemente pesado.

La ciencia que nos ocupa ha sido, desde siempre, una disciplina auxiliar de las ciencias físicas y del arte del ingeniero y del arquitecto, pero para lo sucesivo las matemáticas se han convertido en una disciplina auxiliar de una buena parte de las ciencias biológicas, así como de la economía o de la lingüística, y casi no hay ninguna rama de las ciencias que no recurra a ella, ya como herramienta, yo como verdadero instrumento de pensamiento. Las matemáticas son un testigo escéptico, incluso diría esterilizado, del funcionamiento de nuestro raciocinio.

Las matemáticas son, pues, una de las llaves principales para comprender el mundo en que vivimos; sin embargo, este hecho no es enfatizado lo suficiente en nuestras escuelas secundarias, y en consecuencia una de nuestras graves dificultades es que esta llave permanece todavía misteriosa para muchos hombres. Si bien para ser un matemático creador son necesarios ciertos dones y una vocación firme, para comprender las matemáticas, saber jugar con ellas y ponerlas al servicio de uno, nada de lo anterior es necesario y la puerta está, en principio, abierta a todos; aunque precisa de un trabajo sostenido con interés y de una curiosidad particular.

Es necesario hacer un poco de historia para ver la manera en la que se han constituido estas matemáticas contemporáneas que subyacente en una gran parte de nuestra ciencia. No sé cuánto de lo que voy a describir será parcial, parcial e incompleto, pero trataré de no deformar la perspectiva.

*Artículo publicado originalmente en la Revue de l'enseignement supérierw, editada por L'Association d'Etude pour l'Expansión de l'Enseignement Supérieur, París, números 46-47, 1969. Traducción de Francisco González Ortíz.

**Profesor del Colegio de Francia.

HISTORIA

Entre los documentos egipcios o caldeos que poseemos, figuran una especie de cuadernos de trabajo de estudiantes, de escribas, en donde percibimos el conocimiento del ángulo de dos estrellas, de la superficie de un campo rectangular y a veces trapezoidal, o del volumen de un cubo o de una pirámide regular. Pero lo que llamamos razonamiento está casi siempre ausente y sólo aparece oscuramente esbozado en los ejemplos.

Fue en Grecia donde apareció conscientemente la primera ambición matemática que involucraba la voluntad de construir un tipo de razonamiento coherente y coercitivo capaz de impedir el rechazo de su contenido. Las matemáticas, la lógica y la filosofía nacen simultáneamente, se entrelazan entre sí y usan un lenguaje poco diferenciado que varía solamente según la naturaleza del objeto. Pero el desarrollo matemático de los griegos deja sin resolver dos grandes obstáculos que sólo serán superados siglos después. El razonamiento no es concebido por los griegos como hipotéticamente coercitivo, ni siquiera por Euclides; el juego matemático no ha sido concebido como aquel en el que las reglas se enuncian por un acto libre y los axiomas se requieren dotados de alguna evidencia común y previa a la actividad matemática misma. Existe, por otro lado, un nivel privilegiado de "objetos matemáticos", de "seres matemáticos", objetos idealizados sugeridos por la contemplación del cielo o los problemas de la tierra, por lo menos aquellos que enaltecían la arquitectura, el comercio o la navegación.

Estos dos obstáculos no permiten el desarrollo adecuado de las matemáticas griegas, y el mundo matemático posterior tampoco logra resolver estos problemas, con lo cual esta situación va a permanecer así hasta el siglo XIX.

El desarrollo de la aritmética griega, ciencia de los números, trabaja casi sólo con los enteros y]as fracciones o proporciones; sin embargo, ya ha logrado integrar una teoría de leyes elementales de composición sobre estos números: suma, multiplicación. Esta aritmética elemental no conoce el cero, "objeto ausencia de objeto", y por ende ignora la numeración de posición que es la nuestra.

La geometría, ciencia de las figuras planas o espaciales, fue para los griegos, a título justo, la reina de las ciencias. Basada sobre una estructura en extremo rica -que se me perdone este anacronismo-, es con ella que el espíritu humano va a aprender verdaderamente lo que es un razonamiento, y a darse cuenta de todas las trampas que podían acechar a éste en el camino. La geometría preparará y conducirá a la presentación axiomática de Euclides -que tan a menudo es aún preponderante en las escuelas secundarias- y culminará en la teoría de los conos, elipses, hipérboles y parábolas.

Pero si el plan de Euclides se asemeja al que desearíamos, la realización del proyecto está muy lejos de alcanzar, por falta de fundamentos, un cuerpo de doctrina rigurosa. La mitad de los razonamientos de los primeros libros de Euclides son en realidad pseudorrazonamientos; está ahí, como ejemplo, todo aquello que tiene que ver con el caso de la igualdad de los triángulos. Unos simples retoques no son suficientes para darle solidez al edificio; sin embargo, la sutilidad griega logró ocultar la profunda falta de rigor bajo ciertas dosis de "evidencia", juiciosa y subrepticiamente introducidas. Si todavía hoy algunos jóvenes no comprenden el juego de la geometría llamada elemental, tal como se enseña tradicionalmente, se debe en parte a todo lo arriba mencionado.

Por otro lado, aquello que tiene que ver con la medición de las magnitudes es deficiente, lo cual se explica por la falta de un estatuto matemático de números reales. El primer gran escándalo científico de la historia fue la toma de conciencia del hecho de que la diagonal del cuadrado es "inconmesurable", y no se expresa por ninguna fracción de sus lados; en términos modernos, decimos que û2 no es un número racional. Existe aquí el conflicto entre una aritmética muy rudimentaria y una geometría que desde sus inicios introdujo necesariamente los números reales como û 2 ó ã. Los números "irracionales" reciben un estatuto provisorio que sin embargo durará varios siglos; se trabajará con ellos, pero sin que inspiren una gran confianza, y sin poder tampoco hacer de ellos el objeto de una teoría elaborada.

En ciertas épocas, la familiaridad adquirida en el manejo encubría la deficiencia, pero el problema seguía presente en la conciencia de los matemáticos. Es sólo hasta la segunda mitad del siglo XIX que veremos surgir con Dedikind y Cantor una o más bien varias teorías equivalentes de los números reales sobre las cuales se podía fundar sólidamente todo el conocimiento matemático anterior. Partiendo de este ejemplo de los números reales, puede verse que durante más de veinte siglos las diferentes ramas de las matemáticas han estado muy lejos de tener una misma coherencia, situación que desde entonces ha desaparecido.

En Grecia, la música está presente en el seno de las matemáticas, porque son éstas las primeras que reconocen la relación que existe entre la frecuencia de vibración de las cuerdas y su percepción por el oído. El intervalo musical do-re, o cualquier otro, es una relación de frecuencias, una proporción en el sentido griego, y son los griegos quienes definen los principios de la escala musical occidental. Curiosamente, la música está considerada como la más antigua "física matemática".

Las aplicaciones propiamente técnicas de estas matemáticas griegas no son numerosas: agrimensura, astronomía aplicada a la navegación, estática de máquinas simples, óptica de espejos. Arquímides, con su obra matemática y sus aplicaciones a la mecánica y a la óptica, podría simbolizar el apogeo de la ciencia griega.

Las matemáticas griegas no conllevan el álgebra, en el sentido ordinario del término; ésta madura del siglo VII al XII, principalmente en Persia, y luego se difunde a través del imperio árabe. Al mismo tiempo aparece el cero, y con él esta numeración de posición que es la nuestra, y que facilitará grandemente la práctica del cálculo, a la vez que la elaboración de una teoría de números reales. A través de España y también gracias a Venecia, esta álgebra y esta aritmética perfeccionada conquistarán Occidente.

El próximo paso vendrá del propio Occidente, creador simultáneo del análisis y de la dinámica. La geometría misma, ya sea bajo su forma pura, ya bajo su forma analítica, se interesa en lo sucesivo por las curvas, muy diferentes de los conos griegos, y le importa saber determinar las tangentes de estas curvas o calcular las áreas que encierran. De Buridan a Galileo, y pasando por Descartes, la mecánica se desarrolla ampliamente y ya puede, al menos, plantear sus problemas. Sucede que en todas estas incógnitas: estudio de tangentes y de velocidades, cálculo de áreas, determinación de movimientos, hay una misma operación que es la derivación y su inversa, la integración, las cuales aportan enunciados matemáticos precisos al planteamiento o su solución. Con las obras independientes de Leibniz y de Newton, comienza la era moderna de las matemáticas clásicas.

En el transcurso de un siglo, y provista de esta asombrosa herramienta de análisis, la ciencia matemática se va a convertir, principalmente, en física matemática,y se dará el gran desarrollo de la mecánica teórica -en sus inicios mecánica celeste- pero también de la mecánica terrestre, la hidrodinámica, la teoría del calor y de las vibraciones mecánicas u ópticas, y finalmente, con Ampére, el estudio teórico de la electricidad.

Es desde 1830, al lado de esta poderosa escuela que explica matemáticamente una larga serie de fenómenos físicos y crea los instrumentos matemáticos correspondientes, que comienza la reflexión sistemática de las matemáticas sobre ellas mismas, lo cual finalmente les permitirá asumir su ambición de coherencia y les ayudará, a la vez, a conocer los límites de esta ambición. Evariste Galois, muerto a los 22 años y creador de la noción de grupo, puede ser tomado como el símbolo de un siglo de esfuerzos que van a conducir a la desaparición consciente y definitiva de los dos grandes obstáculos que hemos mencionado. Hay una mutación de aquello que podemos llamar las matemáticas clásicas en unas matemáticas unificadas, nuestras matemáticas contemporáneas, cuyas fuentes tienen cerca de un siglo y medio. En lugar de padecer las estructuras y de reconocerlas un poco al azar, las matemáticas se van a esforzar por dominarlas.

SITUACION ACTUAL

Menos conocido que el desarrollo de la física durante el mismo periodo, el desarrollo de las matemáticas de los últimos cien años ha demostrado ser también muy poderoso y puede ser incluso más importante, puesto que ellas han condicionado, poco o mucho, a todas las otras ciencias. Yo pienso–así lo espero–, que haya pasado el tiempo en que un espíritu ingenuo se podía preguntar de muy buena fe "¿pero qué puede uno encontrar de nuevo en las matemáticas?" Tal pregunta simbolizaba un fracaso de una enseñanza y traicionaba todo el anhelo de las matemáticas vivientes. Que se me permita decir que lo esencial de los descubrimientos o de las creaciones posteriores a 1940, por ejemplo, no podrían ser explicados en menos de 15 000 páginas. Se trata, pues, de un verdadero universo, un mundo donde nada ha sido completamente domeñado.

Las matemáticas se han estudiado primero a sí mismas, y han constituido una especie de juego de piezas sueltas en el cual sus elementos son lo que llamamos las estructuras elementales; es decir, aquellas donde el número de axiomas es escaso. En lugar de comenzar el estudio de las matemáticas según la historia, por las estructuras ricas como aquellas de la geometría euclidiana con su simplicidad de axiomas, se debería comenzar, según el buen orden, por el estudio de piezas elementales, las estructuras simples que deben encajar las unas en las otras para edificar esos complejos y potentes instrumentos que son las grandes teorías.

La primera noción es la noción de conjunto, conjunto de no importa qué, de números; por ejemplo, el conjunto de enteros, de figuras geométricas o de puntos de un plano, pero también el conjunto de palabras de un diccionario, de frases en una lengua viva o de cambios en el seno de una economía. Una noción tal debe ser tomada como un lenguaje cómodo preciso y de un nivel elemental, en el cual ninguna teoría se ha desarrollado. Un conjunto está formado de elementos; hay subconjuntos que comprenden una parte de estos elementos. Entre dos conjuntos acordes puede existir una clase de diccionario de parejas: a todo elemento de un conjunto se puede asociar otro, y viceversa. Es lo que hacemos ingenua y naturalmente cuando contamos los animales de un rebaño o los graduados en matemáticas. Pero pongamos un ejemplo más refinado: asociemos a todo entero el entero par que es su doble, e inversamente a todo entero par su mitad. Obtendremos así un perfecto y extraño diccionario entre un conjunto, el de los enteros, y una parte de éste, la de los enteros pares. Esta posibilidad de un diccionario entre el todo y una parte es lo que caracteriza, para los matemáticos, a los conjuntos infinitos, lo cual no puede darse para un conjunto compuesto de un número finito de elementos.

Sobre estos conjuntos se definen dos clases de estructuras elementales: las estructuras algebraicas (en el sentido contemporáneo del término) y las estructuras topológicas. Las primeras: grupo, cuerpo, espacio vectorial, ponen de manifiesto las operaciones y la teoría de cálculo; las segundas: los límites, la convergencia, etc., y son estas últimas las que nos han permitido razonar correctamente, sin darnos cuenta, en los espacios más o menos arbitrarios de dimensión finita, ciertamente infinita. Señalemos de inmediato que no se trata de un delirio de abstracción: si queremos, por ejemplo, representar los intercambios entre dos economías, introducimos un vector de cantidades de bienes intercambiables y un vector dual de precios correspondientes, en un espacio que tendrá tantas dimensiones como tengan los diferentes bienes considerados. La dirección global de una economía se efectúa prácticamente a partir de modelos de este género.

Pero no es este el lugar para rendirle honores a nuestro universo matemático. Tratemos mejor de distinguir algunas de sus características.

Lo que primero impresiona de las matemáticas, creo yo, es la ausencia total de toda idolatría de la cosa en sí, de todo "cosismo". El matemático trabaja siempre con un diccionario casi perfecto, e identifica sin escrúpulos los objetos de naturaleza diferente, puesto que un diccionario perfecto o isomorfismo, le asegura que no tendrá que pronunciar dos veces el mismo pensamiento en dos lenguas diferentes. ¡Con una vez basta! El ser se encuentra metido entre paréntesis, y es precisamente este carácter el que le da a las matemáticas contemporáneas su poder y su polivalencia. Otro carácter esencial de estas matemáticas es su unidad. Al elaborar un lenguaje común y despejar las estructuras comunes, las matemáticas han acabado con los viejos cuadros históricos que hubieran tendido a fragmentarlas en disciplinas con inclinación a evolucionar de manera divergente. La geometría, entre otras, ha muerto en tanto rama autónoma y ya no es más que el estudio, muy interesante, de un espacio vectorial de tercera dimensión provisto de un producto escalar, y en esta corta frase están contenidos los axiomas necesarios.

Podemos ver de qué manera el punto de vista de las matemáticas sobre ellas mismas se ha alejado del punto de vista histórico que le dio nacimiento. Pero conviene señalar que dentro del reino del pensamiento científico lo que amerita el nombre de idea nueva es la reorganización inmediata y completa de las ideas antiguas. Su autorreforma, que entraña una idea científica nueva, nos ofrece un pasado nuevo, renovado, al mismo tiempo que un futuro por construir. Y eso para ninguna ciencia es más verdadero que para las matemáticas, que desean ser una teoría unificada progresiva y no un conocimiento momificado. Este es el origen de la economía del pensamiento, y nos fue proporcionado por las matemáticas.

El esfuerzo matemático de los cien últimos años ha sido extraordinariamente fructuoso, pero es importante notar que este desarrollo ha sido altamente autónomo y de ninguna manera ha estado directamente condicionado por las aplicaciones. Lo más frecuente ha sido que el libre juego de la imaginación matemática haya provocado esta expansión; si las aplicaciones han sido particularmente ricas, esto ha resultado, casi siempre, por añadidura. Es paradójico ver este juego del matemático, en apariencia gratuito, de llegar cada vez más profundamente a la realidad y conferirle su plena inteligibilidad. Quisiera dar unos ejemplos claros: las teorías matemáticas muy cercanas, como la teoría del espacio de Hilbert y la representación de grupos, han permitido la elaboración de la mecánica cuántica contemporánea y de la teoría de partículas elementales; esta última, construida bajo la influencia de Dirac y Wigner, proviene de un pensamiento algebraico globalmente simple, aunque su técnica haya sido refinada hasta el más pequeño detalle.

Por otra parte, el etnólogo Lévi-Strauss utiliza estructuras algebraicas para el estudio comparado de sistemas de parentela en las diferentes culturas, para lo que él llama estructuras de parentela, de donde proviene el nombre un poco periodístico de estructuralismo.

A través de toda la realidad económica y social, y de muchos problemas de organización, impera la teoría de los juegos, que comenzó hacia 1930 con los trabajos de Von Neuman. Esta teoría, junto con los conceptos de información y estrategia que nos ha llevado a introducir, se nos ha revelado como un magnífico instrumento de inteligencia y de acción que se encarna en la parte más evidente de la investigación operacional. El juego es la cosa más seria del mundo, y todos jugamos; el físico juega con la naturaleza, el dirigente de gran empresa, el autor de planes quinquenales, el urbanista con los fenómenos económicos y, bien entendido, hasta los militares juegan. Muchos de estos juegos son juegos de coalición. Todos jugamos, y queremos elaborar las estrategias que -tomando en cuenta a cada instante nuestra información- nos otorguen el máximo de oportunidades sobre un cierto tipo de ganancias. Mediante la teoría de los juegos, los problemas importantes de nuestra acción y nuestra vida social han encontrado un encuadre único de pensamiento y comienzan a dar origen a técnicas análogas en las cuales juegan un papel preponderante las computadoras. Algunos problemas concretos han recibido una solución racional: se ha vuelto imposible, por ejemplo, administrar las acciones, un puerto marítimo o un aeropuerto, sin la ayuda de la teoría de juegos y de una computadora grande o pequeña. En otros casos, los más numerosos, son sólo acercamientos lo que se sugiere, y éstos evidentemente no dictan la respuesta, pero indican las soluciones coherentes realmente posibles y permiten, en ciertos casos, la previsión a corto plazo.

¿Qué podemos concluir de esta discusión? Las matemáticas, su rigor de análisis, su poder manifestado en la extensión y la diversidad de sus aplicaciones, se han transformado radicalmente por medio de la reflexión sobre sí mismas y mediante SU análisis de lo real. A mi parecer, se trata, para nuestra sociedad, de una mutación intelectual que se ha producido a un ritmo que sobrepasa con mucho la lenta renovación de las generaciones humanas. El imperio de las "ideas hechas" ha terminado, y en todo el mundo nos enfrentamos a un importante y difícil problema: es necesario, en lo sucesivo, preparar a nuestros estudiantes no sólo a comprender, sino a utilizar las matemáticas de nuestro tiempo en su nuevo sentido.

Lo arriba anotado no es válido sólo para los futuros matemáticos profesionales, puros o aplicados, lo es también para el futuro ingeniero, economista, urbanista, investigador en genética, lingüista o psicólogo, y para aquel que está envuelto, en cualquier grado que sea, en la gestión de negocios. Las matemáticas son necesarias, diría yo, para nuestros futuros ciudadanos, quienquiera que ellos sean, si queremos que se muevan con naturalidad y sin desconfianza en el mundo cotidiano; que se sirvan efectivamente de los poderosos instrumentos puestos a su disposición por la informática, y que recurran a métodos y técnicas que puedan ayudarles en su desarrollo personal.

El problema de las matemáticas, y de su enseñanza, se ha convertido en el primero, y quizá el más importante, de los problemas mundiales de la educación, y no es, por cierto, una casualidad el que en la mayoría de los países se está presentando -sobre todo en los últimos años, y es de esperarse que en el futuro- una evolución más o menos brusca de los contenidos y métodos de enseñanza. No hay ni puede haber una concepción definitiva y cómoda de las llamadas matemáticas elementales, fin en sí, perfección carrada sobre ella misma, y que bastaría únicamente con purificar a la luz de experiencias pedagógicas. Por otra parte, enseñar a los no matemáticos a servirse de la eficacia de ciertas técnicas matemáticas disponibles, bien sea de estadística y probabilidad, bien de "programas", se ha convertido en una verdadera necesidad pública. Por tanto, no se trata aquí para los matemáticos de no sé qué "imperialismo" absurdo. Si bien es cierto que hay pocas disciplinas que no requieren de la ayuda de las matemáticas, estas disciplinas no podrán proveerse de los pensamientos básicos necesarios. Saber emplear las matemáticas consiste también en no hacerlas decir más de lo que pueden y exponer claramente las proposiciones propias a cada disciplina de manera adecuada. De proposiciones demasiado alejadas de la realidad no pueden obtenerse, matemáticamente o no, más que tonterías.

No hay que temer alguna cierta pérdida de libertad en un mundo un poco más ordenado matemáticamente, es decir, racionalmente. Con frecuencia se ven surgir las reglas y las leyes no para comprender las motivaciones y presentarlas armoniosamente con lo natural, sino para manejar lo circunstancial y crear un mundo sometido. Bien empleada, una aproximación que dé cuenta racionalmente de una parte del mundo real, puede proporcionar más libertad y justicia.