LA INFLUENCIA DE LA INVESTIGACION DE LAS MATEMATICAS EN LA ENSEÑANZA ESCOLAR*

G. PAPY**

CREAR Y DISTRIBUIR

La investigación matemática produce la ciencia, y ésta, a su vez, es distribuida por la enseñanza, pero es inútil producir si no se distribuye. La historia nos ha demostrado que con harta frecuencia los resultados importantes no son transmitidos a las generaciones futuras.

En matemáticas, como en economía, la producción no lo resuelve todo, pues los productos nuevos también generan problemas de distribución: ¿hay consumidores? ¿a quién le convienen los productos? ¿cómo dar a conocer estos productos? etc.

La gran crisis de los años treinta ha sido calificada como una crisis de superproducción. Cuando los hombres no podían alimentarse, se pensaba que el problema se resolvería destruyendo... Este es, sin duda, el deseo secreto de algunos profesores que tratan de minimizar y ridiculizar a las matemáticas que hoy se crean y que quisieran suprimirlas mentalmente para poder continuar enseñando, con toda serenidad, una ciencia del pasado que ellos creen conocer.

La investigación matemática sólo tiene contacto con la sociedad a través de la enseñanza, y es solidaria y tributaria de ésta en todos los niveles. La enseñanza hace irradiar la investigación y la entrega a los hombres.

IMPORTANCIA CRECIENTE DEL INSTRUMENTO MECANICO

No hace todavía mucho, las aplicaciones de las matemáticas eran la ocupación de una minoría de hombres que trabajaban en los dominios, ciertamente importantes, pero restringidos, de la física, el arte del ingeniero y el álgebra comercial y financiera. El reclutamiento de estas personas sólo era posible entre aquellos que espontáneamente se habían dirigido hacia las matemáticas y a quienes desde hace cerca de dos mil años hemos imaginado como gentes "raras provistas de una gran joroba". En realidad, las matemáticas eran enseñadas esencialmente como un elemento cultural o un juego gratuito del espíritu.

Esta situación se ha modificado profundamente hoy. Las matemáticas han invadido poco a poco todos los dominios donde se ejerce el pensamiento racional, y éstos son cada vez más numerosos.

¿Quién hubiera previsto, hace apenas veinte años, que la topología algebraica sería aplicada en econometría, y que debido a las necesidades de las teorías económicas se generalizaría un teorema de topología de Lefschetz? ¿Qué filólogo hubiera podido imaginar, hace dos siglos, que en la década de 1960 se crearía en Lenigrado una Facultad de Lingüística Matemática? ¿Qué especialista en estudios bíblicos hubiera podido suponer que la autenticidad más incuestionable de los textos estaría garantizada por máquinas electrónicas? El empleo de grandes computadoras modifica profundamente el modo de vida de la sociedad, pero para comprender este empleo y sus limitaciones, quien las utiliza debe tomar conciencia de las nuevas matemáticas subyacentes. Los fenómenos de grupo juegan un papel esencial en el mundo moderno en muchas áreas, en química y en las ciencias humanas como economía, sociología, sicología, pedagogía, ponen de relieve la estadística y las probabilidades. Ahora bien, interpretar estos resultados estadísticos es peligroso si no se dispone de una buena base matemática que precise su alcance.

---

*Artículo publicado originalmente en la Revue de l'enseignement supérieur, editada por L'Association d'Etude pour l'Expansión de l'Enseignement Supérieur, París, números 46-47, 1969. Traducción de Francisco González Ortiz.

**Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad Libre de Bruselas y Presidente del Centro Belga de Pedagogía de las Matemáticas.

La situación actual no nos permite afirmar que todos los niños de 12 años que hoy están en la escuela, emplearán las matemáticas más tarde en su oficio. A esa edad es imposible hacer una discriminación y distinguir quiénes tendrán necesidad de emplear las matemáticas y quiénes no. Es difícil determinar con certidumbre cuál será la profesión futura de un niño de 12 años, e incluso si pudiéramos hacerlo no avanzaríamos mucho, pues podría suceder que mientras los niños maduran las matemáticas invadan esa profesión. Esta ciencia debe aprenderse de joven y sin la ayuda de motivaciones externas que, por lo demás, no existen en los niños o todavía no están a su alcance.

La conclusión se desprende claramente: las matemáticas se han introducido en casi todos los ámbitos, y lo que la sociedad nos demanda hoy es que no sigamos enseñando a una minoría de elegidos, sino que seamos capaces de enseñar a todos los adolescentes. Enseñarlos a emplear una herramienta de la que seguramente tendrán necesidad más tarde.

PRESION SOCIAL PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA MATEMATICA

La sociedad exige. . . ¿pero es posible satisfacer esta exigencia?, ¿no se ha dicho desde hace dos mil años que sólo algunos espíritus están dotados para comprender las matemáticas? Tal afirmación no pudo haberse mantenido tanto tiempo, de no haber contado con un fondo de verdad, y era justificable hasta una época reciente, pero la situación ya no es así debido a muchas razones que vamos a analizar.

Hasta hace poco, las aplicaciones de las matemáticas estaban confinadas a dominios y actividades importantes, pero reducidos, del pensamiento humano. Lo que actualmente se halla en nuestra presencia no son ni la sociedad, ni las matemáticas de otros tiempos, y lo que antiguamente era verdadero, puede, por fortuna, ya no serlo hoy.

En el pasado no se han hecho grandes esfuerzos pedagógicos para enseñar las matemáticas y tampoco ha habido ninguna presión social que haya animado este proceso, como sucedió en otras áreas. No quiero discutir aquí el valor intrínseco, desde el punto de vista de formación del espíritu, que tiene la enseñanza del latín o del griego, pero como para el acceso a numerosas facultades universitarias se exigía un cierto conocimiento de latín y griego, se dio un esfuerzo por acrecentar la eficacia de su enseñanza. De la misma forma, la importancia creciente de las matemáticas ha suscitado en todo el mundo numerosos trabajos de investigación que han permitido la creación de una pedagogía mejor adaptada a la sicología infantil.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Las matemáticas enseñadas tradicionalmente a nivel secundario son una forma degradada de los Elementos de Euclides, apuntalada con otros complementos.

El acceso a las matemáticas exigía que uno penetrara, se confinara y se complaciera en un mundo de formas frías, sin color, y, en realidad, muy poco variadas.

Dentro de las nuevas matemáticas, la geometría es todavía Un aspecto fundamental, pero el profesor puede ahora matematizar válidamente una gama mucho más variada de situaciones, lo cual tiene muchas más probabilidades de interesar a los niños.

Tengo la más grande admiración por la obra de Euclides y siempre me irrita el leer en los mejores libros de historia de las matemáticas esta frase poco más o menos inevitable: “Euclides no fue, de ninguna manera, un gran matemático”; sin embargo, haber reconstruido las matemáticas fundamentales de su tiempo en un edificio único, es una obra suntuosa y admirable que ciertamente exige un gran talento de matemático y numerosas contribuciones originales. Si para juzgar nos basamos en la escasez de tales contribuciones en el transcurso de la historia, resulta muy cierto que los matemáticos no parecen particularmente inclinados a efectuar tales síntesis.

RIGOR E INTUICION

La obra de Euclides ha sido considerada por mucho tiempo como el prototipo de la exposición rigurosa. En el transcurso de los siglos la intuición geométrica y el rigor han estado casi siempre entrelazados. A este respecto es conmovedor releer algunas de las frases que Cauchy pone en la introducción a su Tratado de Análisis. Su ambición, dice, es establecer una construcción tan clara y precisa como la de los Elementos de Euclides. Es curioso constatar que actualmente consideramos la exposición de Cauchy como infinitamente más rigurosa que la de Euclides.

Una de las dificultades de la enseñanza tradicional de las matemáticas es la diferencia de rigor, exigida según cada caso. Es necesaria una gran agudeza para comprender que en ciertas circunstancias uno se contenta con apelar a la intuición, mientras que en otras, no obstante tratarse de las mismas exposiciones, se exige una mayor rigurosidad.

El contexto social en el que viven los niños de hoy está impregnado de ideas científicas, lo cual de golpe sitúa a estos niños a la delantera de los contemporáneos de Euclides. Así, la numeración de posición con la cual están familiarizados desde los 6 ó 7 años, les permite acceder progresivamente a una idea sobre los números reales más clara y más flexible de la que era posible lograr hace dos mil años.

La enseñanza debe tener en cuenta este inmenso progreso y no situarse del lado de las posibilidades de los alumnos y de sus espontáneas exigencias en lo que a rigor concierne. Regodearse en explicaciones de objeciones imposibles de percibir por los alumnos es ciertamente una falta pedagógica grave de la cual la enseñanza tradicional no está exenta cuando quiere volverse más rigurosa. Presentar razonamientos vagos como demostraciones, en tanto que en otras circunstancias se exige un rigor más estricto, es también una falta pedagógica grande, puesto que desconcierta al alumno y no le permite comprender la naturaleza del razonamiento matemático.

Caprichosa en cuanto al rigor que exige, la enseñanza tradicional pierde, así, no sólo a los niños no aptos a seguir el razonamiento, sino también a aquellos dotados de un espíritu más exigente… y quienes tienen razón de no comprender.

EL DRAMA

A la mitad del siglo XIX se produce el drama del descubrimiento de lagunas en la obra de Euclides, tanto desde el punto de vista lógico, como desde el axiomático, descubrimiento que provoca el nacimiento de una crisis que habría de durar cerca de un siglo y durante el cual se oponía el rigor a la intuición.

Esta crisis terminará finalmente con la actual reforma de la enseñanza de las matemáticas.

Durante la segunda mitad del siglo XIX la humanidad ya no dispone de una exposición de la geometría elemental que esté considerada como rigurosa por los sabios contemporáneos. En 1899, los famosos Grundlagen d'Hilbert llenan esta laguna, pero esta obra maestra no es de ninguna manera un manual de enseñanza secundaria.

Durante muchos años, todavía después de 1900, aquel que quería enseñar geometría a nivel de secundaria, se encontraba en la ineluctable necesidad de recurrir a la intuición y de presentar, de hecho, una mezcla complicada y sutil de pasajes rigurosos y de insidiosos recursos a la intuición.

El libro de Artin, Geometric Algebra, publicado aproximadamente medio siglo después que los Grundlagen de Hilbert, permite apreciar todo el progreso realizado en el intervalo, pero pese a su calidad pedagógica innegable, esta obra no está destinada a principiantes. No obstante, se trata de una fuente de inspiración que contribuyó considerablemente en la reconstrucción del edificio matemático que subyace en la actual reforma de la enseñanza.

Conviene citar las contribuciones de Choquet y Dieudome, entre otros, a la enseñanza de la geometría métrica, nociones que lejos de oponerse se complementan armoniosamente.[1]

PERMANENCIA DE EUCLIDES

En lugar de oponerse a Euclides, la reconstrucción actual puede ser considerada como un homenaje a él, pues pone en evidencia aquello que éste había comprendido y realizado tan admirablemente: la necesidad pedagógica de un marco unitario y la importancia primordial de la geometría plana. Aunque el fin estético de Euclides era la edificación de la geometría en el espacio, consagró, sin embargo, mucho más tiempo a la geometría plana.

Las nociones planas, los diseños planos, los círculos de Euler, los diagramas de Venn y las gráficas multicolores han tomado este lugar en las matemáticas de hoy.

La actual reconstrucción reúne todos los resultados anteriormente citados, y está conforme con el espíritu de los Elementos de Euclides.

CONCEPTOS UNIFICADORES

Quizá la enseñanza más grande de la historia de la ciencia es que ésta no siempre se complica al progresar. Poco a poco, la investigación matemática ha puesto en evidencia los conceptos unitarios y simplificadores que permiten pasar por alto los fragmentarios y complicados resultados anteriores. Estas visiones unitarias presentadas de conjunto son, de hecho, las más simples, pero pueden parecer de un alto nivel de abstracción a quienes han llegado a ellos siguiendo el orden histórico.

Hemos podido constatar que todos los conceptos fundamentales de las matemáticas de hoy se encuentran, de hecho, en el conocimiento común de los niños, aunque de una forma vaga e imprecisa.

Uno de los principios esenciales de la enseñanza moderna de las matemáticas consiste en poner estas nociones en evidencia al afinarlas progresivamente. De esta manera se reduce considerablemente el nivel de las abstracciones. La noción refinada que se obtiene, incluso si es abstracta, guarda sicológicamente el carácter familiar de las situaciones que le han dado nacimiento. Uno se inspira así en la pedagogía de las situaciones de Caleb Gattegno, que consiste en presentar a los alumnos situaciones escogidas de manera que por sus reacciones espontáneas van evolucionando naturalmente hacia tal o cual concepto importante.

MATEMATIZACION DE SITUACIONES

De la manera mencionada arriba, los estudiantes se habitúan, desde el principio, a efectuar una gestión esencial en las aplicaciones: la matematización de situaciones.

Evidentemente en el mundo moderno es difícil prever cuáles serán las matemáticas que más tarde emplearán los alumnos; por otra parte, las mutaciones tan frecuentes de nuestro medio hacen que muchas personas deban cambiar varias veces de oficio en el transcurso de su existencia o de técnica dentro de su propio oficio. Las matemáticas no escapan a este fenómeno.

El doctor Pollak, director de los servicios de investigación de la Bell Telephone, ha puesto en evidencia que a nivel de los alumnos los recursos tradicionales llamados de matemáticas aplicadas, no cubren, de hecho, más que el 5 % de las necesidades actuales de aplicación de las matemáticas. En lugar de enseñar unas matemáticas hechas y de dar cursos de recetas matemáticas (las cuales muy frecuentemente serán sobrepasadas y abandonadas en el momento en que nuestros alumnos lleguen a la edad adulta), debemos inculcar en ellos aquello que tiene más probabilidades de sostenerse permanentemente, es decir, las grandes

[1] G. CHOQUET, L'enseignement de la Géométrie, Hermann, París, 1964. J. DIEUDONNÉ, Algebre Linéaire et Géométrie Elémentaire, París, 1964.

estructuras obtenidas progresivamente y utilizadas como elementos motores en la construcción del edificio matemático.

No es posible prever cuáles situaciones serán matematizadas más tarde ni cuál matemática será empleada para este propósito, pero sabemos que la matematización de situaciones seguirá siendo fundamental. Por tanto, es esencial habituar a nuestros alumnos, desde el principio, a esta manera de desarrollo del espíritu. Por medio de la matematización activa de situaciones, se sustituye el “Learning” por el “Teaching”.[2] El fin último de los profesores no es el de enseñar, sino el de hacer aprender y el de enseñar a aprender.

RECONSTRUCCION DEL EDIFICIO MATEMATICO A NIVEL DE NIÑOS Y ADOLESCENTES

El trabajo preparatorio de la reforma actual ha revestido muy frecuentemente el aspecto de una investigación matemática, puesto que antes que nada convenía reconstruir el edificio matemático. Ciertamente no se trata de un descubrimiento en el sentido puro del término, sino más bien en el de la matemática aplicada. El problema por resolver consistía en presentar las matemáticas de base elemental, dentro de una construcción unitaria, por medio de una exposición progresiva y -condición pedagógica esencial- accesible para los alumnos a quienes está destinada.

Por su propia naturaleza las matemáticas modernas se prestan admirablemente a un diseño como el mencionado, lo cual se debe, sin duda, a que contienen en sí una especie de pedagogía interna que explica sus verdades por medio de la enseñanza.

VIRTUD PEDAGOGICA DEL METODO AXIOMATICO

Una de las dificultades de la enseñanza tradicional de las matemáticas, y sobre todo de los principios de la geometría métrica, proviene del hecho de que, de entrada, se trata de una situación compleja. El niño se encuentra con dificultades para discernir las estructuras lógicas.

El método axiomático ha sido presentado como el descubrimiento matemático más grande del siglo XX y, en efecto, ofrece una solución clave a la pedagogía moderna. Existen diversos métodos axiomáticos y tipos diferentes de exposiciones axiomáticas. El más perfecto, y el mejor de éstos, es la exposición axiomática formal, donde los objetos no son definidos y no entran en la teoría más que a través de las relaciones abstractas introducidas por los axiomas. Este tipo de exposición no conviene para los principiantes.

Se debe adoptar, por el contrario, el punto de vista del médico, quien en sus mejores momentos axiomática, a menudo sin saberlo. Se estudia una situación y se idealiza para matematizarla mejor y retener las afirmaciones admitidas.

Se trata, pues, de un hecho de experiencia, así como del resultado de una idealización o de una extrapolación de conocimientos anteriores.

Precedentemente estas nociones provenían del condicionamiento al que estábamos habituados o a la frecuentación de ciertas situaciones. La presente axiomatización es modesta, humilde y progresiva.

Sabemos bien desde el principio que no lo decimos todo: lo que admitimos no caracteriza la situación, pero permite razonar dentro de los contextos lógicos simples donde el niño se encuentra a sus anchas. Se intenta crea un soporte intuitivo adaptado a estas impresiones rigurosas. Evitamos suministrar modelos abracadabrantes compatibles con ciertas axiomatizaciones parciales encontradas al paso, porque conviene respetar la intuición de las estructuras fundamentales de las matemáticas.

Este método axiomático progresivo, adoptado por razones esencialmente pedagógicas, está de acuerdo con el espíritu de las matemáticas de hoy.

[2]En inglés en el original. (NT.)

APTITUD PARA EL RAZONAMIENTO

Mientras más multiplicamos las experiencias con niños de poca edad, más nos impresiona su aptitud para razonar correctamente en situaciones simples. A esto se debe que estas situaciones les interesen y que para resolverlas puedan ayudarse de esquemas. Las deficiencias lógicas tan reprochadas a los alumnos en cursos tradicionales provienen frecuentemente de una de las cuatro causas externas que señalamos a continuación.

1. La situación no está dominada.
2. La situación es muy compleja.
3. La estructura lógica de la situación no aparece.
4. Ausencia de motivo para razonar.

En los cursos tradicionales, cuando a ojos de los alumnos se intenta probar un resultado como "evidente", se convierte en broma el razonamiento matemático, y se emplean argumentos que inicialmente aparecen como mucho menos convincentes y que pecan por la falta de este mismo rigor, exigido, sin embargo, en otras circunstancias.

En la pedagogía moderna se introducen las primeras demostraciones sólo en las situaciones donde el resultado es dudoso. Cuando la clase está dividida respecto de una conjetura, la necesidad de la demostración está socialmente motivada.

MAQUINAS-HERRAMIENTAS DE LAS MATEMATICAS

Las matemáticas de hoy ponen en evidencia las grandes estructuras algebraicas o topológicas y las estructuras de "encrucijada" (así llamadas por Choquet) "Algebraico-topológicas". Para la mayoría de los matemáticos profesionales vivos, estas estructuras han sido obtenidas a posteriori, a partir de la matemática anterior que estas estructuras ilustraban. En la pedagogía moderna, se evita el hacerlas aparecer como una especie de lujos a posteriori, que aclaran sin ser indispensables. Las estructuras son introducidas poco a poco, ascendentemente, como elemento motor de la construcción del edificio matemático.

Choquet ha calificado estas estructuras de máquinas-herramientas diciendo que se trata de una matemática que abandona el estado artesanal para iniciar su revolución industrial. Sería aberrante terminar un curso poniendo estas estructuras en evidencia; su adquisición debe ser un punto culminante final. Si el alumno ha hecho el esfuerzo de procurarse una máquina-herramienta, es necesario que se persuada, por experiencia, de que al disponer de ella ha adquirido un mayor poder y puede tratar los problemas que anteriormente le era imposible resolver.

CONCORDANCIA RIGOR-INTUICION

Actualmente, los esfuerzos de la investigación permiten enseñar las matemáticas de una manera rigurosa a la vez que intuitiva, lo cual se logra partiendo de situaciones familiares y por medio del método activo de la pedagogía de las situaciones.

La gran crisis de la enseñanza de las matemáticas, que durante un siglo ha opuesto el rigor a la intuición, pertenece, en lo sucesivo, al pasado.

Gracias a la investigación matemática y a una pedagogía adecuada, la enseñanza ha reencontrado el equilibrio y la armonía que dieron la eterna belleza a los Elementos de Euclides.